

Beitrag zu den Berechnungsmethoden des hexagonalen Krystallsystems.

Von Dr. Alb. Schrauf,

Docent an der Universität und Custosadjunct am k. k. Hof-Mineralien-Cabinete.

(Mit 3 Tafeln.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 10. Juli 1863.)

Unter den Krystallsystemen nimmt das rhomboëdrische am meisten das Interesse des theoretischen Krystallographen in Anspruch, weil sich nur in demselben die Möglichkeit verschiedener Methoden der Berechnung und Auffassung geltend gemacht hat. Dennoch sind bisher manche Analogien übersehen worden, welche sowohl die Berechnung und Construction zu erleichtern als auch den innigen Causalnexus der Systeme anzuzeigen vermögen. Die Berücksichtigung dieser vernachlässigten Elemente führte mich zur Entwicklung einer neuen Methode der Berechnung der des orthohexagonalen (Pogg. Ann. 114), welche vollständig neu gegenüber den bisher bekannten den Vorzug der Einfachheit und des innigen Causalnexus mit den übrigen Problemen der Krystallphysik hat, wie dies vielfache Prüfungen derselben lehrten.

§. 1. In nachfolgenden Zeilen soll die Theorie dieser Berechnungsmethode entwickelt werden. Der ihr zu Grunde liegende Lehrsatz lautet: „Die Annahme dreier rechtwinkliger Axen $100 : 010 : 001 = 1 : \frac{1}{\sqrt{3}} : \frac{1}{2}$ tang (111) (001) steht mit den Grundannahmen des rhomboëdrischen Systems nicht in Widerspruch, wenn von den 6 in eine Kugelhälfte entfallenden Dihexaëderflächen 4 als Grundpyramiden mit (111) und 2 als Domen mit dem Index (201) bezeichnet werden“.

Mit Zugrundelegung dieses Satzes sind nun alle Formeln für die Lage der Flächenpole berechenbar.

A. Die Lage des Poles der Fläche (*hkl*) ist zu bestimmen.

Sei Fig. 1 P der Pol der Fläche hkl , X, Y, Z die Normalpunkte der Axen, deren Neigungen YZ, ZX, XY gleich ξ, η, ζ , endlich das Parameterverhältniss abc , so erhält man als Ausgangspunkt die Gleichung

$$\cos PX = \cos \xi \cos PY + \cos \zeta \sin PY \cos PYX,$$

führt man nun in dieser Gleichung nach der Reihe folgende Substitutionen aus

$$\begin{aligned} PYX &= F(ZYX, ZYP) \\ (ZYX, ZYP) &= F'(\xi, \eta, \zeta, PY, PZ) \\ (PY, PZ) &= F''(PX, a, b, c, hkl) \end{aligned}$$

wobei die Natur der Functionen F, F', F'' durch die allgemeinen krystallographischen Relationen hinlänglich bestimmt ist, so folgen für PX , und analog für PY, PZ die im nachfolgenden angegebenen Gleichungen:

$$\frac{\cos^2 PX}{h^2 b^2 c^2} = \frac{\cos^2 PY}{k^2 a^2 c^2} = \frac{\cos^2 PZ}{l^2 a^2 b^2} = \frac{1 + 2 \cos \xi \cos \eta \cos \zeta - \cos^2 \xi - \cos^2 \eta - \cos^2 \zeta}{h^2 b^2 c^2 \sin^2 \xi + k^2 a^2 c^2 \sin^2 \eta + l^2 a^2 b^2 \sin^2 \zeta} \quad (I)$$

$$\left\{ -abc[chk(\cos \zeta - \cos \xi \cos \eta) + bhl(\cos \eta - \cos \xi \cos \zeta) + akl(\cos \xi - \cos \zeta \cos \eta)] \right\}$$

Aus dieser allgemeinen Formel folgt dann vermittelt der Grundannahmen

$$\xi = \eta = \zeta = 90^\circ; \quad a : b : c = \sqrt{3} : 1 : \frac{\sqrt{3}}{2} M, \quad (II)$$

wobei $M = \tan(111)(001)$ ist

$$\begin{aligned} \cos^2 PX &= \frac{M^2 h^2}{M^2 h^2 + 3M^2 k^2 + 4l^2}, \\ \cos^2 PY &= \frac{3M^2 k^2}{M^2 h^2 + 3M^2 k^2 + 4l^2}, \\ \cos^2 PZ &= \frac{4l^2}{M^2 h^2 + 3M^2 k^2 + 4l^2}; \end{aligned} \quad (III)$$

oder in der für die rechnende Krystallographie passenderen Form

$$\begin{aligned} \tan^2(010)(111) &= M^2 \\ \tan^2(001)(hkl) &= \frac{M^2 h^2 + 3M^2 k^2}{4l^2} \\ \tan^2(100)(hkl) &= \frac{4l^2 + 3M^2 h^2}{M^2 h^2} \\ \tan^2(010)(hkl) &= \frac{4l^2 + M^2 h^2}{3M^2 k^2} \end{aligned} \quad (IV)$$

Die zu Grunde liegende Gleichung des Parameterverhältnisses ist

$$(V) \quad \frac{1}{h} \cos PX = \frac{1}{\sqrt{3k}} \cos PY = \frac{M}{2l} \cos PZ.$$

B. Die Distanz zwischen den Polen zweier Flächen ist zu bestimmen.

Sei der Winkel (PQ) in der Fig. 1 zu ermitteln, so kann die Bezeichnung von A) beibehalten und hiezu blos noch Q (p, q, r) eingeführt werden. Es ist dann

$$\cos PQ = \cos PY \cos QY + \sin PY \sin QY \sin PYQ;$$

sei nun

$$\begin{aligned} PYQ &= f(PYX, QYX) \\ (PYX, QYX) &= f'(PX, PY, QX, QY, \zeta) \\ (PX, PY, PZ, QX, QY, QZ) &= f''(abc hkl pqr), \end{aligned}$$

so folgt, wenn man analog $\cos PQ$ als Function von PQX entwickelt, und dann die Eliminationsmethode für die höheren Potenzen anwendet

$$(VI) \quad \cos PQ = \sqrt[2]{\frac{\begin{aligned} &hpb^2c^2 \sin^2 \xi + kqa^2c^2 \sin^2 \eta + lra^2b^2 \sin^2 \zeta \\ &-(hr+pl)ab^2c(\cos \eta - \cos \xi \cos \zeta) \\ &-(kr+ql)a^2bc(\cos \xi - \cos \eta \cos \zeta) \\ &-(hq+pk)abc^2(\cos \zeta - \cos \xi \cos \eta) \end{aligned}}{\begin{aligned} &h^2b^2c^2 \sin^2 \xi + k^2a^2c^2 \sin^2 \eta + l^2a^2b^2 \sin^2 \zeta \\ &-2abc[hlb(\cos \eta - \cos \xi \cos \zeta) + kla(\cos \xi - \cos \eta \cos \zeta) + hkc(\cos \zeta - \cos \eta \cos \xi)] \\ &p^2b^2c^2 \sin^2 \xi + q^2a^2c^2 \sin^2 \eta + r^2a^2b^2 \sin^2 \zeta \\ &-2abc[prb(\cos \eta - \cos \xi \cos \zeta) + qra(\cos \xi - \cos \eta \cos \zeta) + pqc(\cos \zeta - \cos \eta \cos \xi)] \end{aligned}}}$$

Aus dieser Gleichung folgt nun durch Substitution von (II)

$$(VII) \quad \cos PQ = \frac{M^2hp + 3M^2kq + 4rl}{\sqrt{M^2h^2 + 3M^2k^2 + 4l^2} \sqrt{M^2p^2 + 3M^2q^2 + 4r^2}}$$

Diese Gleichung gibt die Distanz zweier beliebiger Krystallpole als Function der Parameter sowohl, als auch der Indices unter der postulirten Annahme rechtwinkliger Axen im hexagonalen System.

Die Formeln I—VII sind nun die allgemeinen, welche noch alle von M , d. i. von der noch näher zu bestimmenden Grösse der Hauptaxe abhängen — im nachfolgenden C , D , sollen nun jene Fälle betrachtet werden, wo diese Variable eliminirbar ist.

C. Die Distanz der Pole zweier Prismen ist zu bestimmen.

Für Prismen, welche in den Zonen (100) (001) und (010) (001) liegen, müssen die allgemeinen Gesetze, wie sie theils in obigen Zeilen für das orthohexagonale System entwickelt, theils wie sie für alle rechtwinkelige Axensysteme im Allgemeinen gelten, beibehalten werden. Für die Zone (100) (010) hingegen ist eine Vereinfachung möglich. Es ergibt sich daher für die Flächen $M(m, n, 0)$ und $N(u, v, 0)$ Fig. 3 die Formel

$$\begin{aligned} \cos MN &= \frac{3nv + mu}{\sqrt{m^2 + 3n^2} \sqrt{u^2 + 3v^2}} \\ \text{tang } (100) (mn0) &= \text{cotg } (010) (mn0) = \frac{\sqrt{3} \cdot n}{m}. \end{aligned} \quad (\text{VIII})$$

Hieraus ergeben sich für die Flächen aus der Zone der sechsseitigen Prisma folgende Werthe, welche ich ihrer Wichtigkeit halber hieher setze:

(100) (110) = 60° 0' 0" 0	(010) (110) = 30° 0' 0" 0
(100) (320) = 52 24 39 8	(010) (230) = 23 24 47·4
(100) (430) = 49 6 23 5	(010) (340) = 21 3 6·2
(100) (530) = 46 6 7 6	(010) (350) = 19 6 23·5
(100) (240) = 40 53 36 5	(010) (120) = 16 6 7·6
(100) (520) = 34 42 54 2	(010) (250) = 13 0 14·1
(100) (310) = 30 0 0 0	(010) (130) = 10 53 36·5
(100) (410) = 23 24 47 4	(010) (140) = 8 12 47·5
(100) (510) = 19 6 23 2	(010) (150) = 6 35 12·5
(100) (610) = 16 6 7 6	(010) (160) = 5 29 46·9
(100) (710) = 13 53 52 3	(010) (170) = 4 42 53·8

Diese Prismendistanzen sind jene, welche ohne einen zu complicirten Zonenverband mit hohen Indices zu verlangen dem Grundprisma von 60° eigenthümlich sind, und nicht bloß im hexagonalen, sondern auch im prismatischen Krystallsystem eine für die Krystallphysik wichtige Rolle spielen.

D. Die Symbole der zur Hauptaxe gleichgeneigten Flächen sind zu bestimmen.

Die Neigung aller Flächen zur Hauptaxe $L(001)$ steht unter dem Gesetze (IV).

$$\text{tang}^2 (001) (hkl) = \frac{M^2 h^2 + 3M^2 k^2}{4l^2}$$

hiermit ist zur Lösung der gestellten Frage nur die Ermittlung solcher Werthe der Variablen hkl nöthig, welche den Ausdruck constant erhalten.

$$\frac{M^2h^2 + 3M^2k^2}{4l^2} = \frac{M^2x^2 + 3M^2y^2}{4z^2} = \text{Const.}$$

Eine allgemeine Auflösung der Gleichung würde eine bedeutende Anzahl von Flächen liefern, da man aber sowohl auf den Zonenverband der Prismenflächen, als auch auf die Nothwendigkeit einfacher ganzzahliger Indices zu reflectiren hat, so wird hiedurch die Aufgabe beschränkt. Die Gleichung

$$\frac{h^2 + 3k^2}{4l^2} = \frac{x^2 + 3y^2}{4z^2}$$

führt mittelst

$$\frac{h + x}{3y + 3k} = \frac{\pm (y - k)}{\pm (h - x)}$$

zu

$$2h \pm 6k = -4x$$

$$2k \pm 2h = -4y$$

Da wir aber mit den Indices von Pyramiden rechnen, welche doppelter Zeichen der Symmetrie wegen zu lassen, so ist es möglich zu reduciren und dies führt als Lösung zu folgenden Werthen

$$(IX) \quad \begin{array}{ll} 2l = z & 2l = z \\ h + 3k = x & h + k = y \\ h - k = y & 3k - h = x \\ k - h = -y & h - 3k = -x \end{array}$$

Die Combination dieser Zahlen gibt die möglichen ganzzahligen Werthe der Indices für die zur Hauptaxe gleichgeneigten Flächen und führt zur zwölfseitigen Pyramide.

Nach dieser Ermittlung der Indices erübrigt weiters noch zu untersuchen, welchem Gesetze die gegenseitige Neigung der Flächen unterworfen ist.

Die Lösung dieser Frage ist auf indirectem Wege leicht möglich, und zwar mit Zuhilfenahme der den Pyramiden entsprechenden Prismen. Nehmen wir folgende 3, in einem Quadranten liegende und

nach (IX) von einander abhängige Indices (hkl) , (pqr) , (uvw) , so würde die Gleichung

$$\frac{3kq + hp}{\sqrt{h^2 + 3k^2} \sqrt{p^2 + 3q^2}} = \frac{3kv + hu}{\sqrt{h^2 + 3k^2} \sqrt{u^2 + 3v^2}}$$

welche die Bedingung der Gleichheit der Prismendistanz

$$(pq0) (hk0) = (hk0) (uv0)$$

involvirt, bei Annahme von (IX) verlangen

$$h(p-u) = 3k(v-q).$$

Substituirt man nun für p , u , v , q die Werthe aus (IX) für die Combinationen x , y , so erhält man

$$h^2 = 3k^2$$

für die Combinationen x , $-y$, oder $-x$, y , hingegen

$$6hk = 6hk.$$

Hieraus folgt somit, dass die 12 Flächen des der 12seitigen Pyramide entsprechenden Prismen zu einander nicht alle wechselseitig gleich geneigt sind; da aber die Winkel des Prisma correlativ mit denen der Pyramide sind, so ist auch bewiesen, „dass die Neigung einer Fläche der 12seitigen Pyramide zu den beiden Nachbarflächen ungleich, hingegen zu den beiden hierauf folgenden gleich ist“.

Diese aufgestellten Sätze haben nun den Gegenstand der mathematischen Betrachtung erschöpft, da hierin die wichtigsten Formeln abgeleitet sind, welche sich auf die Rechtwinklichkeit der Axen in diesem Systeme stützen. Die übrigen Formeln, welche noch zur Berechnung nöthig sind, gliedern sich theils in geometrische, theils in solche, welche der allgemeinen theoretischen Krystallographie zu entnehmen sind; für beide ist es nicht nöthig hier in speciellere Details einzugehen und bemerke nur, dass die letzterwähnten vollkommen ident sind mit denjenigen, welche im prismatischen Systeme zur Anwendung kommen, wie z. B. die Regeln des Zonenverbandes, der Distanz 2 Flächen in einer Zone u. s. w.

§. 2. Geht man zur Betrachtung der vorkommenden Combinationen über, so ist im orthohexagonalen System analog wie im pris-

matischen die holoëdrische Entwicklung einer Fläche durch die acht Variationen der Vorzeichen der Indices gegeben. Jedoch bewirken die dem Systeme eigenthümlichen Gleichungen (IX), welche auch unter der Form

$$\begin{aligned} X) \quad & h' = 3k \pm h \\ & k' = h \mp k \\ & l' = 2l \end{aligned}$$

zu schreiben sind, eine bedeutend höhere Symmetrie; es sind die Flächen der 12seitigen Pyramide nicht zu trennen und sie bilden nicht bloß mathematisch, sondern auch physikalisch ein Ganzes. Sind auch die Indices der Form nach nicht gleich, so verbindet sie dennoch ein einfaches mathematisches Gesetz. Die holoëdrische Form der Fläche hkl ist somit die ¹⁾ dihexagonale Pyramide Fig. 4 mit der Gesamtzahl der vorkommenden Flächen gleich 24; jedoch bietet das Gesetz (X) selbst einige Ausnahmefälle dar, in welchen die holoëdrische Form nur die halbe Anzahl von Flächen besitzt; diese Ausnahmefälle sind bedingt durch das Erfülltsein einer der Bedingungen

$$\begin{array}{ll} \text{(XI)} & 1) h = k \qquad 3) h = 3k \\ & 2) k = 0 \qquad 4) h = 0. \end{array}$$

Die beiden ersten Bedingungen erzeugen Dihexaëder erster Ordnung Protopyramiden Fig. 5, die letzteren hingegen Dihexaëder zweiter Ordnung DeuteroPyramiden Fig. 6, welche um 30° oder 90° gegen erstere verwendet sind; beide unterscheiden sich wesentlich durch die ihre Neigung zur Hauptaxe wegen des Factors $\sqrt{3}$.

§. 3. Die dihexagonale Pyramide ist zugleich auch die Grundform für die hemiëdrischen Ausbildungen. Die parallellächige Hemiëdrie $\pi \{hkl\}$ erzeugt durch die rhomboëdrische Hemiëdrie, wenn man sich an den gewöhnlichen Sprachgebrauch hält, Skalenoëder und Rhomboëder, durch die pyramidale Tritopyramiden; die geneigtflächige $\times \{hkl\}$ hingegen die hexagonalen Trapezoëder. Die specielle Betrachtung folgt.

¹⁾ Ich bemerke, dass, wenn es nöthig wäre, die Form hkl von der Fläche hkl zu trennen, für erstere das Symbol $\Sigma (hkl)$ oder $\{hkl\}$ zu benützen ist. Ferners erwähne ich, dass ich, den classischen Werken Naumann's folgend, dessen Namen für die wichtigsten Combinationen beibehalten habe.

A. Rhomboëdrische Hemiëdrie $\pi \{hkl\}$. Die rhomboëdrische Hemiëdrie tritt ein, wenn von der hexagonalen Pyramide (Fig. 2) auf der obern und untern Kugelhälfte je die abwechselnden Paare von Flächen ($1 \cdot 1' - 2\bar{3} - 2' \cdot 3 - 2' \cdot \bar{3}'$ etc.) zur Entwicklung gelangen. In Folge des Charakters dieser Hemiëdrie kommen oben und unten parallele Flächen vor.

Die holoëdrische Stammform verwandelt sich in ein hexagonales Skalenoëder, Fig. 7, 8. Diese zwei complementären Skalenoëder befinden sich nur in verschiedener Stellung und lassen sich durch eine Drehung um die Hauptaxe in parallele Stellung bringen und bilden deshalb keinen enantiomorphen Gegensatz. Die Bezeichnung derselben ergibt sich leicht aus dem oben aufgestellten Grundsatz. Behält man die in Fig. 2 angedeuteten Werthe der Indices fortwährend bei, so ist Fig. 7 wegen der gleichen Ausbildung des 1, 3 und 2, 4 Quadranten eine Combination der Flächen:

$$\begin{array}{cccc} (pqr) & (p\bar{q}r) & (\bar{h}kl) & (\bar{u}vw) & (\bar{h}\bar{k}\bar{l}) & (\bar{u}\bar{v}\bar{w}) \\ (h\bar{k}\bar{l}) & (uv\bar{w}) & (h\bar{k}\bar{l}) & (u\bar{v}\bar{w}) & (\bar{p}\bar{q}\bar{r}) & (\bar{p}\bar{q}\bar{r}) \end{array}$$

hingegen Fig. 8, wegen der gleichen Ausbildung des 1, 2 und 3, 4 Quadranten eine Combination von

$$\begin{array}{cccc} (uvw) & (\bar{u}vw) & (\bar{p}\bar{q}\bar{r}) & (\bar{h}\bar{k}\bar{l}) & (p\bar{q}\bar{r}) & (h\bar{k}\bar{l}) \\ (\bar{u}\bar{v}\bar{w}) & (u\bar{v}\bar{w}) & (p\bar{q}\bar{r}) & (h\bar{k}\bar{l}) & (\bar{p}\bar{q}\bar{r}) & (\bar{h}\bar{k}\bar{l}). \end{array}$$

Die für die Praxis nothwendige Unterscheidung dieser beiden Fälle ergibt sich von selbst, wenn man consequent jene Fläche der Bestimmung des Skalenoëders zu Grunde legt, welche dem positiven Quadranten angehört. In Folge dessen ist das Symbol von

$$\begin{array}{l} \text{Fig. 7 } \pi \{pqr\} \\ \text{„ 8 } \pi \{uvw\}. \end{array}$$

Während so die Skalenoëder Hemiëdrien der dihexagonalen Pyramide $\{hkl\}$ sind, haben hingegen die Proto- und Deuteropyramiden bei gleicher hemiëdrischer Entwicklung andere Formen zu Folge.

Die Protopyramide $\{hkl\}$ Fig. 5 verwandelt sich durch alleinige Ausbildung ihrer abwechselnden Flächen (die einzelnen Flächen sind hier äquivalent mit den Flächenpaaren bei $\{hkl\}$) in Rhomboëder

Fig. 9 und 10. Die zwei von derselben Pyramide ableitbaren Rhomboëder unterscheiden sich nur durch ihre Stellung und sind durch eine Drehung um 180° in parallele Lage zu bringen.

Fig. 9 ist eine Combination von

$$(2h0l) (\bar{h}hl) (\bar{h}\bar{h}l) \\ (2\bar{h}0\bar{l}) (h\bar{h}\bar{l}) (hh\bar{l})$$

Fig. 10 von

$$(2\bar{h}0l) (h\bar{h}l) (hh\bar{l}) \\ (2h0\bar{l}) (\bar{h}h\bar{l}) (\bar{h}\bar{h}\bar{l}).$$

Zur Bezeichnung der Gestalt ist die bei den Skalenoëdern eingeschlagene Methode beizubehalten, welche hier bei Anwendung des gleichen Symbolen auf die Indices einer Proto- oder Deutero-pyramide unzweifelhafte Bestimmungen erlaubt.

Unter allen in der Krystallphysik bekannten Hemiëdrien ist keine so wichtig und keine so häufig, wie eben die rhomboëdrische, welche die Mehrzahl der orthohexagonal-krystallisirenden Substanzen unterworfen ist.

Diese erwähnten Punkte wären die Folgen der Einwirkung der rhomboëdrischen Hemiëdrie auf die Pyramidenflächen. Die Flächen des hexagonalen Prisma bleiben in ihrer Ausbildung ungestört, nur macht sich auch hier der hemiëdrische Gegensatz geltend, dass die Flächen die dem auftretenden Zonenverband angehörende physikalische Bedeutung erlangen. Dieser Gegensatz tritt besonders dann zu Tage, wenn noch durch hinzutretende Hemimorphie der Unterschied zwischen oben und unten schärfer charakterisirt wird, wodurch sich dann wie bei Turmalin etc. ein trigonales und ditrigonales Prisma erzeugt.

B. Pyramidale Hemiëdrie $\pi\pi \{hkl\}$. Die pyramidale Hemiëdrie ist zuerst von Haidinger 1824 in seinen Untersuchungen über den Apatit aufgestellt und an diesem Mineral bis in die neueste Zeit als charakterisirend beibehalten worden, wo von G. v. Rath und Hessenberg an Apatiten von Tirol auch das Vorkommen der holoëdrischen Ausbildung nachgewiesen ward.

Das Ableitungsgesetz der pyramidalen Hemiëdrie ist, dass von den Flächen der dihexagonalen Pyramide die halbe Anzahl, und zwar symmetrisch die rechten oder linken, oben und unten gleichzeitig zur Entwicklung gelangen. (Siehe Fig. 2 1, $\bar{1}$ —3 $\bar{3}$ —2, $\bar{2}$ —1, $\bar{1}$ ' etc.)

Es gelangen hier nicht bloß wie bei der rhomboëdrischen Hemiëdrie die parallelen, sondern auch noch die gegenüberliegenden Flächen zur Ausbildung, daher ich zur Bezeichnung das doppelte Symbol $\pi\pi$ wähle. Es entstehen daher aus der hexagonalen Pyramide Fig. 3 die Tritopyramiden Fig. 11 und 12. Ihrer Gestalt nach sind sie ähnlich Proto- oder Deuteroypyramiden, welche um einen willkürlich kleinen Winkel aus ihrer Lage durch eine Drehung um die Hauptaxe gebracht sind. Beide Körper Fig. 11 und 12 sind aber an und für sich nicht absolut verschieden, sondern nur durch die begleitenden Flächen zu erkennen und durch eine Drehung von 90° zu einander zu verwandeln.

Fig. 11 ist, wie sich leicht ersehen lässt, eine Combination der Flächen (hkl) , $(\bar{p}qr)$, $(\bar{u}vw)$, $(\bar{h}\bar{k}\bar{l})$, $(p\bar{q}\bar{r})$, $(u\bar{v}\bar{w})$ — (hkl) , $(\bar{p}q\bar{r})$, $(\bar{u}v\bar{w})$, $(\bar{h}\bar{k}\bar{l})$, $(p\bar{q}\bar{r})$, $(u\bar{v}\bar{w})$, und in Folge des Gesetzes der Symmetrie hinlänglich bestimmt durch das Symbol $\pi\pi$, angewendet auf die Fläche des positiven Quadranten, daher das Zeichen sich ergibt $\pi\pi \{hkl\}$.

Fig 12 ist gebildet aus (pqr) , (uvw) , $(\bar{h}\bar{k}\bar{l})$, $(\bar{p}\bar{q}\bar{r})$, $(\bar{u}\bar{v}\bar{w})$, $(h\bar{k}\bar{l})$ — $(p\bar{q}\bar{r})$, $(u\bar{v}\bar{w})$, $(\bar{h}\bar{k}\bar{l})$, $(\bar{p}\bar{q}\bar{r})$, $(\bar{u}\bar{v}\bar{w})$, $(h\bar{k}\bar{l})$ und entsteht durch Anwendung des Gesetzes auf (pqr) oder (uvw) daher als Symbol der Gestalt willkürlich

$$\pi\pi \{pqr\} \text{ oder } \pi\pi \{uvw\}$$

gewählt werden kann.

C. Trapezoëdrische Hemiëdrie $\times \{hkl\}$. Der Charakter dieser Hemiëdrie besteht darin, dass in der oberen und unteren Kugelhälfte nur die abwechselnden einzelnen Flächen zur Ausbildung gelangen. (Fig. 2. 1.2̄. — 3.3̄, oder 2.1̄ — 3̄3̄ etc.) Hiedurch verwandelt sich die dihexagonale Pyramide in ein hexagonales Trapezoëder.

Die aus einer Pyramide abgeleiteten Trapezoëder besitzen aber nicht bloß einen Gegensatz der Lage, sondern sind enantiomorph verschieden, verhalten sich wie rechts und links und lassen sich daher durch Drehung um die Hauptaxe nicht in parallele Lage bringen, ihr charakterisirendes Zeichen muss daher rx oder lx sein.

Zur Flächenbezeichnung übergehend, hat Fig. 13 folgende Indices (hkl) , $(\bar{u}vw)$, $(\bar{p}qr)$, $(\bar{h}\bar{k}\bar{l})$, $(u\bar{v}\bar{w})$, $(p\bar{q}\bar{r})$ — $(p\bar{q}\bar{r})$, $(u\bar{v}\bar{w})$, $(\bar{h}\bar{k}\bar{l})$, $(\bar{p}\bar{q}\bar{r})$, $(\bar{u}\bar{v}\bar{w})$, $(h\bar{k}\bar{l})$; hingegen Fig. 14 folgende: (pqr) ,

(uvw) , $(\bar{h}kl)$, $(\bar{p}\bar{q}\bar{r})$, $(\bar{u}\bar{v}\bar{w})$, $(h\bar{k}\bar{l})$ — (hkl) , $(\bar{u}\bar{v}\bar{w})$, $(\bar{p}\bar{q}\bar{r})$, $(\bar{h}\bar{k}\bar{l})$, $(u\bar{v}\bar{w})$, $(p\bar{q}\bar{r})$. Als verkürztes Symbol hat daher für Fig. 13 $\times \{hkl\}$ zu gelten; Fig. 14 ist ableitbar von $\times \{pqr\}$ oder $\times \{uvw\}$, welche identische Resultate liefern.

Das Vorkommen dieser Formen in der Natur als selbstständige Gestalten ist mehrmals in Zweifel gezogen worden und man hat die am Quarz bisweilen beobachteten hexagonalen Trapezoëder entweder nach dem Vorgange Naumann's durch die gleichzeitige Ausbildung zweier correlativer trigonaler Trapezoëder oder nach G. Rose durch eine stattfindende Zwillingsbildung zweier gleichgedrehter Individuen zu erklären versucht. Obgleich beide Annahmen vortrefflich sind, und hier nicht der Ort ist, das Vorkommen in der Natur zu erörtern, so will ich dennoch bemerken, dass kein Grund der Krystallophysik vorhanden ist, welcher das Vorkommen dieser einfachen hemiëdrischen Gestalten unmöglich macht.

§. 4. Die in diesem Paragraphen zu untersuchende Tetartoëdrie lässt sich ebenfalls in eine parallel und geneigtflächige trennen.

A. Rhomboëdrische Tetartoëdrie $\frac{\pi}{2} \{hkl\}$. Die durch dieselben erzeugten Formen (Tritorhomoëder) lassen sich ableiten sowohl durch Anwendung der Tetartoëdrie auf die dihexagonalen Pyramiden, als auch durch die der Hemiëdrie auf die Skalenoëder. Wird nämlich von jedem Flächenpaare des Skalenoëders nur die rechte oder linke Fläche ausgebildet, so dass im Gegensatz zur unteren Hälfte die parallele Hemiëdrie erhalten bleibt, so erhält man ganz ebenso, als wenn die drei symmetrisch vertheilten Flächen der dihexagonalen Pyramide mit ihren Parallelen angenommen würden, jedesmal Rhomboëder, welche gegen die Hauptrhomoëder um etwas gedreht sind. Sie werden, wenn man das Bildungsgesetz hkl , $\bar{p}qr$, $u\bar{v}\bar{w}$, $p\bar{q}\bar{r}$, $\bar{u}\bar{v}\bar{w}$, $\bar{h}\bar{k}\bar{l}$ bedenkt, hinreichend durch das unzweideutige Symbol $\frac{\pi}{2} \{hkl\}$ charakterisirt.

B. Trapezoëdrische Tetartoëdrie $\frac{x}{2} \{hkl\}$. So wie die obige Form vom Skalenoëder, ist diese vom Trapezoëder ableitbar. Sie entsteht, wenn von den Flächenpaaren der hexagonalen Trapezoëder symmetrisch nur eine Fläche ausgebildet ist (Fig. 2 1.2—'2.'1—'3.'3'). Hier tritt aber ein Gegensatz zwischen links und

rechts auf, der bedeutet: „ob von den untern Flächen die zu den obern — rechts oder links — mehr geneigte zur Ausbildung gelangt ist“.

Die entstehenden Trapezoëder sind daher enantiomorph verschieden und müssen durch $r \frac{x}{2} \{hkl\}$ und $l \frac{x}{2} \{hkl\}$ unterschieden werden, da sie durch keine Drehung in einander zu verwandeln sind.

Als Beispiele der möglichen Entwicklungen mögen Fig. 15 und 16 dienen, von denen erstere in Analogie mit Quarz ein linkes trigonales Trapezoëder, hingegen die zweite ein rechtes ist.

Fig. 15 ist als Combination von (pqr) , $(h\bar{k}l)$, $(\bar{h}kl)$, $(\bar{p}q\bar{r})$ ($\bar{u}\bar{v}w$), $(u\bar{v}\bar{w})$ durch $l \frac{x}{2} \{pqr\}$ — Fig. 16 als (pqr) , $(p\bar{q}\bar{r})$, $(\bar{u}\bar{v}w)$, $(\bar{h}\bar{k}l)$, $(\bar{h}kl)$, $(\bar{u}\bar{v}\bar{w})$, durch $r \frac{x}{2} \{pqr\}$ zu bezeichnen. Da sich nur, wie leicht einzusehen, aus der holoëdrischen Form je drei rechte und drei linke trigonale Trapezoëder ableiten lassen, welche aber durch Drehung um die Hauptaxe in einander überführbar sind, so ist es hinreichend, um das Trapezoëder genau in seiner Lage zu bestimmen, den Index der Flächen anzugeben, von welchen aus das Gesetz $r, l, \left(\frac{x}{2}\right)$ seinen Anfang nimmt.

Die am Quarz die Drehung der Polarisationssebene anzeigenden Flächen gehören diesen eben besprochenen Formen an.

§. 5. In den vorhergehenden Sätzen wurde nachgewiesen, dass, vom Principe der parallelen und geneigtflächigen Hemiëdrie ausgehend, die in der Natur vorkommenden Gestalten von der dihexagonalen Pyramide leicht und ungezwungen ableitbar sind und hiedurch zugleich eine weitere Bestätigung für die Richtigkeit der dem orthohexagonalen Systeme zu Grunde gelegten Hypothese rechtwinkliger Axen erlangt. In diesem Paragraphen sollen die vollständigen Combinationen besprochen werden.

Besteht der zu untersuchende Krystall aus einer zonen- und flächenreichen Combination, so wird die Berechnung und genaue Bestimmung der Flächen durch die Gleichungen (I) — (XI) in Verbindung mit den allgemeinen für rechtwinkelige Axensysteme geltenden Lehrsätzen schnell und sicher sein, wenn ein charakteristischer Winkel bekannt ist. Schwieriger ist hingegen die Entscheidung in solchen Fällen, wo nicht Combinationen, sondern bloß eine Fläche als vollständige Form auftritt, indem dann, wenn keine

Nebenflächen bekannt sind, die Lage der Axen a und b erst ermittelt werden muss. Ausserdem sind noch oftmals die Indices als Functionen der Winkel zu bestimmen; es sind daher namentlich die durch die Hemiëdrie sich ergebenden Formen genau zu untersuchen.

I. Hexagonale Pyramiden. Aus der Betrachtung der bei denselben vorkommenden Winkelwerthe ergibt sich

$$1) \quad \tan \frac{1}{2} (hkl) (\bar{h}\bar{k}l) = \tan (hkl) (001) = \sqrt{\frac{M^2h^2 + 3M^2k^2}{4l^2}}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad \cos \frac{1}{2} (hkl) (3k-h, k+h, 2\bar{l}) &= \\ &= \cos \frac{1}{2} (3k-h, k+h, 2l) (h\bar{k}l) = \\ &= \cos \frac{1}{2} (3k+h, h-k, 2l) (3k+h, \bar{h}-\bar{k}, 2\bar{l}) = \\ &= \cos (3k+h, h-k, 2l) (100) = \frac{M(h+3k)}{2\sqrt{3M^2k^2 + M^2h^2 + 4l^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \quad \cos \frac{1}{2} (hkl) (3k+h, \bar{h}-k, 2\bar{l}) &= \\ &= \cos \frac{1}{2} (3k-h, h+k, 2l) (3\bar{k}-\bar{h}, h+k, 2\bar{l}) = \\ &= \cos \frac{1}{2} (3k+h, h+k, 2l) (h\bar{k}l) = \\ &= \cos (3k-h, h+k, 2l) (010) = \frac{\sqrt{3} \cdot M(h+k)}{2\sqrt{3M^2k^2 + M^2h^2 + 4l^2}} \end{aligned}$$

Zu messen sind daher die drei verschiedenen Winkeln, woraus mittelst der angegebenen Gleichungen die Indices wie auch die Lage unzweifelhaft bestimmt wird. Um einzusehen, dass letzteres der Fall ist, hat man sich nur zu vergegenwärtigen, dass nicht blos allgemein

$$\frac{a}{h} \cos PX = \frac{b}{k} \cos PY = \frac{c}{l} \cos PZ$$

sondern im speciellen Falle des orthohexagonalen Systems für zwei Flächen auch zu gelten hat

$$(XII) \quad \frac{1}{h} \cos PX = \frac{1}{\sqrt{3} \cdot g} \cos QY$$

daher sich die Axen X und Y (sie besitzen ausserdem noch einen gemeinschaftlichen von Z abhängigen irrationalen Factor) durch die Abhängigkeit von $\sqrt{3}$ unterscheiden.

II. Für Skalenoëder und Trapezoëder führt die Anwendung eben dieses Verfahrens vollkommen zur Kenntniss der Lage und Indices. Bei den Skalenoëdern kommen vor die Winkel

$$\begin{aligned}
 1) \quad & \cos \frac{1}{2} (3k + h, h - k, 2l) (hk\bar{l}) = \\
 & = \cos \frac{1}{2} (3k - h, h + k, 2l) (hk\bar{l}) = \\
 & = \cos (3k - h, h + k, 2l) (010) = \frac{\sqrt{3} \cdot M (h+k)}{2 \sqrt{3M^2k^2 + M^2h^2 + 4l^2}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2) \quad & \cos \frac{1}{2} (3\bar{k} - \bar{h}, h + k, 2l) (3k - h, h + k, 2\bar{l}) = \\
 & = \cos \frac{1}{2} (3k + h, \bar{h} - \bar{k}, 2l) (3k + h, h - k, 2\bar{l}) = \\
 & = \cos (3k + h, h - k, 2l) (100) = \frac{M (h+3k)}{2 \sqrt{3M^2k^2 + M^2h^2 + 4l^2}}
 \end{aligned}$$

Aus diesen Messungen, so wie aus den Functionen derselben, d. i. den Winkeln der anliegenden Flächen — ergeben sich die Cosinuse von PX, PY, PZ , hieraus folgt nun mit Rücksicht auf deren Rationalität die Bestimmung der Lage und Indices. Für die hexagonalen Trapezoëder hingegen sind die vorkommenden Werthe

$$\begin{aligned}
 1) \quad & \cos \frac{1}{2} (3k + h, h - k, 2l) (hk\bar{l}) = \\
 & = \cos \frac{1}{2} (3k - h, h + k, 2l) (3\bar{k} - \bar{h}, h + k, 2l) = \\
 & = \cos (3k - h, h + k, 2l) (010) = \frac{\sqrt{3} \cdot M (h+k)}{2 \sqrt{3M^2k^2 + M^2h^2 + 4l^2}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2) \quad & \cos \frac{1}{2} (3k + h, h - k, 2l) (3k + h, \bar{h} - \bar{k}, 2\bar{l}) = \\
 & = \cos \frac{1}{2} (3k - h, h + k, 2l) (hk\bar{l}) = \\
 & = \cos (3k + h, h - k, 2l) (100) = \frac{M (h+3k)}{2 \sqrt{3M^2k^2 + M^2h^2 + 4l^2}}
 \end{aligned}$$

Während bei den Skalenoëdern der Winkel der Seitenkanten zur Bestimmung von PZ führt, so gibt hingegen bei den Trapezoëdern die Messung von PP' direct den Werth.

Aus dem Gange der Untersuchung für diese Fälle sieht man, dass immer zwei verschiedene Winkelwerthe vorhanden und dies die doppelten Winkel zweier Flächen zu den Axen sind. Diese zur Bestimmung der Indices benützend, lassen sich folgende ganz allgemeine Formeln aufstellen:

$$(XIII) \quad F(X) = \cos \frac{1}{2} P\bar{Q} = \frac{M(3k+l)}{2\sqrt{Mh^2 + 3M^2k^2 + 4l^2}}$$

$$(XIV) \quad F(Y) = \cos \frac{1}{2} Q\bar{R} = \frac{\sqrt{3} \cdot M(h+k)}{2\sqrt{M^2h^2 + 3M^2k^2 + 4l^2}}$$

welche mit Zuziehung der Bekannten

$$F(Z) = \cos PZ = \frac{2l}{\sqrt{M^2h^2 + 3M^2k^2 + 4l^2}}$$

hinreichen, die Elemente zu bestimmen. Diese Winkel bilden die Grundlage, von welchen auch weiter die Distanzen PQ und QR ableitbar sind, und zwar entweder durch directe Combination von $F(Z)$ mit $F(X)$ oder $F(Y)$ — oder durch die Prismendistanzen der Zonen (010) (100), sobald die Indices bekannt sind.

III. Für die Tritorhomböeder und trigonalen Trapezoëder sind keine besonderen Formeln zu geben, da sie einerseits nicht als specielle Gestalten allein vorzukommen pflegen, andererseits die Betrachtung der Projection, und der oben aufgestellten Sätze, für welche auch hier keine weitere Vereinfachung möglich ist, genügt.

§. 6. Geht man zur Betrachtung der holoëdrischen Gestalten und Combinationen über, so fällt hier die Schwierigkeit weg, die Lage der Axen bestimmen zu müssen, indem durch die Grundannahme von (111) alle übrigen Verhältnisse sich von selbst hieraus ergeben.

Um die Leichtigkeit der Auflösung an einigen der flächenreichsten Combinationen zu zeigen, wähle ich hiezu einige Formen von Beryll, Apatit und Quarz.

In Fig. 20 ist eine Combination des Berylls dargestellt, gebildet aus den dihexagonalen Pyramiden t, s, u, z . Betrachtet man $t' t''$ als (111), ($\bar{1}\bar{1}\bar{1}$), so ergibt sich unmittelbar aus dem Zonenverband der Fig. 3 die Indices $t = 201, m = 100, m', m'' = 110$. Da hiermit die die Lage charakterisirenden Elemente gegeben, das Prisma und seine Zone als Protoprisma erkannt, so folgen unter Berücksichtigung der Messungen

$$Pt = 29^\circ 56' 5, \quad Pu = 49^\circ 2' 5, \quad Ps = 44^\circ 56'$$

$$uz = 14 26 \cdot 5 \quad zs = 7 44 \cdot 5 \quad zP = 45 27 \cdot 5$$

die Indices

$$u = 401, \quad u'u'' = 211, \quad s'' = 021, \quad s, s' = 311,$$

$$z = 10 23, \quad z' = 843, \quad z'' = 263.$$

Somit ist Fig. 20 eine holoëdrische Combination von 001, {111} {221}, {311}, {843}, 110, 100. —

Eine der wichtigsten Combinationen ist ferner die der pyramidalen Hemiëdrie, wie sie am Apatite zur Ausbildung gelangt. Fig. 18 stellt hiefür den genauen Zonenverband dar — im Nachfolgenden sind die nöthigsten Winkel angegeben.

$$\begin{array}{lll}
 Pr = 22^{\circ} 55' & Px = 40^{\circ} 13' & Pa = 51^{\circ} 45' \\
 Py = 59 \quad 25 & Ps = 55 \quad 41 & ms = 13 \quad 57 \\
 mn = 7 \quad 40 & oP = 56 \quad 44 & ox = 19 \quad 2 \\
 Mu = Mu' = 30 & Mh = 19 \quad 6 & Mh = 40 \quad 54.
 \end{array}$$

Unter der Annahme $x = 111$ ergibt sich aus diesen Messungen so wie dem vorhandenen Zonenverband

$$\begin{array}{llll}
 x'x'' = 111. & x = 201. & r'r'' = 112. & r = 101. \\
 y'y'' = 221 & y = 401 & s's'' = 311 & s'' = 021 \\
 a'a'' = 223. & a = 403 & uu' = 310 & u'' = 010 \\
 M'M'' = 110 & M = 100. & &
 \end{array}$$

Diese Flächen sind nun die holoëdrischen Formen von $\{111\}$, $\{112\}$, $\{223\}$, $\{221\}$, $\{311\}$, $\{110\}$, $\{310\}$; ausser diesen bemerken wir aber auch Formen, welche nur theilweise und zwar von jedem Prisma aus $\frac{r}{l}$ ausgebildet sind, so dass sie in der obern Kugelhälfte einander gegenüber liegen und im Allgemeinen parallellächig vorkommen. Diese Entwicklung haben wir unter dem Symbol $\pi\pi \{hkl\}$ begriffen. Da nun im vorigen die holoëdrischen Formen bestimmt wurden, so gelangen wir mittelst des Zonenverbandes leicht zu den Indices von $\pi\pi$ — es sind

$$\begin{array}{llll}
 m = 5\bar{1}1 & n = 7\bar{1}1 & o = 7\bar{1}2 & h = 510 \\
 m' = 421 & n' = 531 & o' = 532 & h' = 210 \\
 m'' = 131 & n'' = \bar{2}41 & o'' = \bar{1}21 & h'' = 130
 \end{array}$$

Aus diesen Zeichen ergibt sich die vollständige Übereinstimmung mit den bei $\pi\pi \{hkl\}$ auftretenden, und somit ist

$$\begin{array}{ll}
 m, m'm'' = \pi\pi \{421\} & n, n'n'' = \pi\pi \{531\} \\
 o, o'o'' = \pi\pi \{532\} & h, h'h'' = \pi\pi \{210\}
 \end{array}$$

womit nun der zu untersuchende Krystall vollständig definiert ist.

Geht man weiter zur Betrachtung der Tetartoëdrie, so zeigt Fig. 19 einen der zahlreichen Fälle des Quarzes. Ausser den holoëdrischen Formen $z = \{111\}$, $m = \{110\}$ kommt $s' = \pi \{021\}$ vor und in weder parallellächiger noch gegenüberliegender Ausbildung $\frac{l}{l}$ 6 Flächen (y), welche nach den Messungsdaten $my = 25^{\circ} 5'$, $mz = 38^{\circ} 13'$ sich bestimmen als

$$\begin{array}{lll} y = 131 & y' = 4\bar{2}1 & y'' = \bar{5}11 \\ y = \bar{1}3\bar{1} & y' = 5\bar{1}\bar{1} & y'' = 4\bar{2}\bar{1} \end{array}$$

daher $y = l \frac{x}{2} \{131\}$ ist.

Ausser diesen einfachen Krystallen sind jetzt noch die Zwillinge zu betrachten.

Im orthohexagonalen Systeme ist die Zwillingensaxe meist parallel entweder der Hauptaxe oder einer Rhomboëderfläche. Beide Fälle sind an und für sich leicht zu erkennen.

Das Gesetz einer Drehung um die Hauptaxe ist eines der häufigsten und auch jenes, welches in den wichtigen, aber noch nicht absolut sicher gestellten Fällen des Quarzes zur Anwendung kommt. Wegen der Merkwürdigkeit derselben ist es nöthig, selbe etwas näher zu erörtern. Die Zwillinge des Quarzes kennzeichnen sich nämlich nur durch eine, gegen das gewöhnliche Vorkommen abweichende Lage der Trapezoëderflächen. Wollte man die in der Natur vorkommenden Gestalten nicht als Zwillinge auffassen, so würde Fig. 21 eine Combination mit den Flächen

$$\begin{array}{cccccc} (421) & (\bar{1}31) & (\bar{5}11) & (4\bar{2}1) & (\bar{1}3\bar{1}) & (\bar{5}11) \\ (\bar{5}1\bar{1}) & (13\bar{1}) & (4\bar{2}\bar{1}) & (\bar{5}\bar{1}\bar{1}) & (\bar{1}3\bar{1}) & (4\bar{2}\bar{1}) \end{array}$$

sein, welche nach dem schon bekannten Schema sich als vollständiges hexagonales Trapezoëder mit dem Symbol $\frac{r}{r} \times \{421\}$ erweist. Man kann aber auch nach dem Vorgange G. Rose die Gestalt als Zwilling auffassen mit der Zwillingensaxe (001), entstanden durch Verwachsung zweier Individuen, deren jedes einzelne gleiche Drehung der Polarisationssebene und daher gleiche Lage der dieselben charakterisirenden Flächen, hier rechts, besitzt.

Weitergehend zu Fig. 17, ist diese als Combination von

$$\begin{array}{cccccc} (511) & (\bar{1}31) & (4\bar{2}1) & (4\bar{2}\bar{1}) & (\bar{1}3\bar{1}) & (\bar{5}11) \\ (4\bar{2}\bar{1}) & (13\bar{1}) & (\bar{5}\bar{1}\bar{1}) & (\bar{5}\bar{1}\bar{1}) & (\bar{1}3\bar{1}) & (4\bar{2}\bar{1}) \end{array}$$

ein vollständiger Skalenoëder der Form $\pi \{511\}$. G. Rose fasst diese Gestalt als Zwilling zweier Individuen von ungleicher Drehung auf.

Von den Fällen, wo nicht (001) die Zwillingensaxe ist, sind keine so interessanten und zweideutigen bekannt, wie die hier am Quarz aufgeführten. Schwierigkeiten ergeben sich hier so wenig wie bei den übrigen Systemen in der Theorie, da sich die Lage der Zone für die Zwillingensfläche sicher bestimmen lässt, nur in der Praxis treten hier so wie überall viele das Erkennen erschwerende Momente ein.

§. 7. Nachdem in den früheren Paragraphen die eigentlichen theoretischen Untersuchungen durchgeführt wurden, so erübrigt in diesem die für die Construction nöthigen Daten zu geben.

Durch die aufgestellten Grundsätze der Abhandlung ergibt es sich gleichsam von selbst, dass wir alle Formen des Systems in ihrer Construction von den drei senkrechten Axen ableiten werden. Dies gewährt einen grossen Vortheil, welchen wohl alle, die mit Krystallzeichnung wirklich vertraut sind, zu würdigen verstehen werden. Denn nur die axinometrische Methode der Ableitung der Formen schliesst sich in ihrer Einfachheit und Zweckmässigkeit der Combination unmittelbar der Natur an, jede andere Methode entweder aus den Kantenwinkeln oder aus Linear-Projectionen die Gestalten abzuleiten, ist unhandsam und viel zu complicirt.

Ohne hier auf eine detaillirte Darstellung der bisher benützten Methoden einzugehen, will ich jedoch einige Differenzen besprechen, welche in der Constructionsmethode, die den Rhomboëder zum Ausgangspunkt nimmt, vorkommen.

Mohs und nach ihm Haidinger ¹⁾ benützt zur Ermittlung der Lage der Axen a und b für alle rechtwinkelige Parameter die analytischen Gleichungen Fig. 22

$$\begin{array}{ll} \text{für } b & y = \frac{1}{3} x \\ \text{„ } a & - y = \frac{1}{18} x \end{array} \quad (\text{XV})$$

hingegen für das rhomboëdrische System wählt er eine Lage des sechsseitigen Prisma, so dass dessen senkrechte Axen a und b eine Lage

$$\begin{array}{ll} \text{für } b & y = \frac{1}{5} x \\ \text{„ } a & - y = \frac{3}{25} x \end{array}$$

entspricht.

Diese Abweichung Mohs von seiner eigenen perspectivischen Grundaufstellung ist bis jetzt noch nicht erwähnt und berücksichtigt worden, da die Complication die beim rhomboëdrischen Systeme befolgte Construction jeden Causalnexus verdeckte. Diese Änderung in der perspectivischen Lage, welche durch nichts — die scheinbare Symmetrie des sechsseitigen Prisma in der Zeichnung ist kein

¹⁾ Poggendorff's Annalen 1825. V. 507.

mathematischer Grund — gerechtfertigt ist, habe ich nicht beibehalten, sondern, um die Uniformität für alle Systeme zu wahren, für die Lage der Axen im orthohexagonalen System die Gleichung XV angenommen — für die Länge derselben habe ich gleichfalls seine für rechtwinkelige Axen geltenden Angaben XVI beibehalten (Fig. 23).

$$(XVI) \quad \begin{aligned} c &= \sqrt{3^2 + 1} \\ b &= \sqrt{1 + \frac{1}{3^2}} \\ a &= \sqrt{3^2 + \frac{1}{6^2}} \end{aligned}$$

Mittelst dieser Principien reducirt sich die Construction auf Zeichnungen ähnlich den prismatischen Gestalten, welche nur einige Vorsicht bei hemiëdrischen Formen bedürfen. Ohne zur Darstellung der Methode weiterer Zeichnungen zu bedürfen, kann man auf die bereits im Texte erwähnten Figuren hinweisen, für welche ich jetzt die Indices und das Axenverhältniss angebe.

$$1 \frac{1}{\sqrt{3}} : 0.493 \text{ (Kalkspath).}$$

Fig. 4. (131) (421) (511)

5. (111) (201)

6. (311) (021)

7. (511) (51̄1) (4̄21) (4̄2̄1) (1̄31) — (5̄11) (5̄1̄1) (42̄1) (13̄1) (42̄1) (13̄1)

8. (131) (1̄31) (5̄1̄1) (4̄2̄1) (5̄1̄1) (42̄1) — (1̄31) (13̄1) (5̄1̄1) (42̄1) (51̄1) (42̄1)

$$1 \frac{1}{\sqrt{3}} : 0.732 \text{ (Apatit).}$$

11. (531) (711) (241) (5̄31) (7̄11) (24̄1) — (53̄1) (71̄1) (24̄1) (5̄3̄1) (71̄1) (24̄1)

12. (711) (241) (531) (7̄11) (24̄1) (5̄31) — (71̄1) (24̄1) (53̄1) (71̄1) (24̄1) (5̄3̄1)

$$1 \frac{1}{\sqrt{3}} : 0.635 \text{ (Quarz).}$$

13. (531) (241) (711) (5̄31) (24̄1) (7̄11) — (71̄1) (24̄1) (53̄1) (71̄1) (24̄1) (5̄3̄1)

14. (711) (241) (531) (711) (24̄1) (5̄31) — (24̄1) (71̄1) (53̄1) (24̄1) (71̄1) (53̄1)

15. (511) (421) (4̄21) (5̄11) (1̄31) (13̄1)

16. (511) (51̄1) (1̄31) (4̄21) (4̄21) (1̄31).

Die noch folgenden Figuren haben ihre Indices schon im Texte und hier im Obigen zugleich das Axenverhältniss der Substanz, so dass letzteres nur für Beryll mit $1 : \frac{1}{\sqrt{3}} \quad 0.4988$ nachzutragen ist.

Wenn ich nun schliesslich noch anführe, dass das reguläre Sechseck mittelst der Gleichungen

$$\begin{array}{lll} \text{für (110)} & a = \sqrt{3} & b = 1 \\ \text{„ (100)} & a = \frac{\sqrt{3}}{2} & b = 0 \end{array} \quad (\text{XVII})$$

construirt wird, glaube ich alle für die Zeichnung nöthigen Momente erörtert zu haben.

§. 8. Auf die übrigen allgemeinen Principien überzugehen, halte ich für überflüssig, da sie für alle Systeme gleich bleiben — es ist somit zum Schlusse der Abhandlung nur noch nöthig, eine Vergleichung der durch diese Berechnungsmethode erzielten Formen mit der Anschauungsweise anderer Autoren zu geben. In der aufzustellenden Tabelle will ich nur die wichtigsten, d. i. Weiss und Miller's Symbole berücksichtigen, da ja für Mohs, Lewy, Naumann's Bezeichnungen ohnehin Gleichungen bekannt sind, welche dieselben in die ungleich wichtigeren Zeichen von Weiss oder Miller transformiren.

Seien daher $a_1 a_2 a_3 c$, die reciproken Indices von Weiss, wobei c die Hauptaxe und $a_3 = a_2 - a_1$ ist.

Ferner $\mu\nu\rho$ die Indices von Miller, wobei $(\mu\sigma\sigma)$ in die Zone pr , $(\nu\sigma\sigma)$ in die Quadrante pqr , $(\rho\sigma\sigma)$ in die Quadrante $(\bar{p}\bar{q}r)$ fällt, so erhält man unter der Voraussetzung, (pqr) beziehen sich der Reihe nach auf die orthohexagonalen Axen a, b, c folgende Gleichungen:

Orthohexagonal	Weiss	Miller
p	$2a_1 - a_2$	$2\mu - \nu - \rho$
q	a_2	$\nu - \rho$
r	c	$\mu + \nu + \rho$
$\frac{1}{2}(p+q)$		$\mu - \nu$
q		$\nu - \rho$
$\frac{1}{2}(q-p)$	a_3	$\nu - \mu$
r	c	$\mu + \nu + \rho$
$2p + 2r$	$2a_1 - a_2 + c$	μ
$-p + 3q + 2r$	$-a_1 + 2a_2 + c$	ν
$-p - 3q + 2r$	$-a_1 - 2a_2 + c$	ρ

Um überdies eine praktische Vergleichung zu erleichtern, so gebe ich in Nachfolgendem eine Zusammenstellung einiger specieller Bezeichnungen.

Orthohexagonal	Miller	Weiss	Naumann
001	111	$\infty a, \infty a, \infty a, c$	0P
{110}	{211}	$a, a, \infty a, \infty c$	∞P
{310}	{011}	$2a, a, 2a, \infty c$	$\infty P2$
{111}	{100}	$a, a, \infty a, c$	P
{112}	{110}	$a, a, \infty a, \frac{1}{2} c$	$\frac{1}{2} P$
{221}	{111}	$a, a, \infty a, 2c$	2P
{311}	{142}	$2a, a, 2a, 2c$	2P2
{131}	{524}	$a, \frac{1}{3} a, \frac{1}{2} a, c$	$3P \frac{3}{2}$

Eine allgemeine Vergleichung sowohl des Zonenverbandes als auch der Indices gibt Fig. 3, welche in freier Schrift die orthohexagonalen Indices, in rother hingegen die Miller'schen Zeichen angibt.

Hiermit ist eine nahezu vollständige Betrachtung aller im orthohexagonalen Systeme vorkommenden Verhältnisse geliefert; eine Discussion der Methode in Verbindung mit einer Kritik der gegen sie statt mathematischer Beweise vorgebrachter Hypothesen würde den bloß theoretisch - krystallographischen Vorwurf dieser Schrift überschreiten.

Fig. 13.

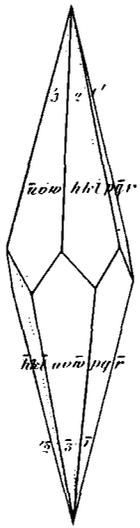


Fig. 14.

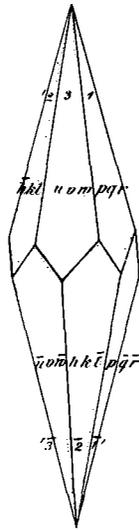


Fig. 15.

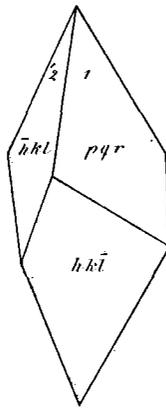


Fig. 16.

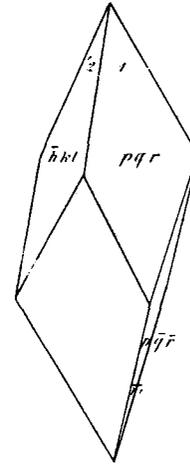


Fig. 17.

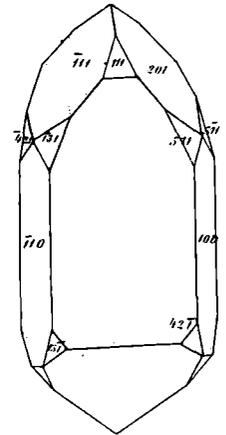


Fig. 18.

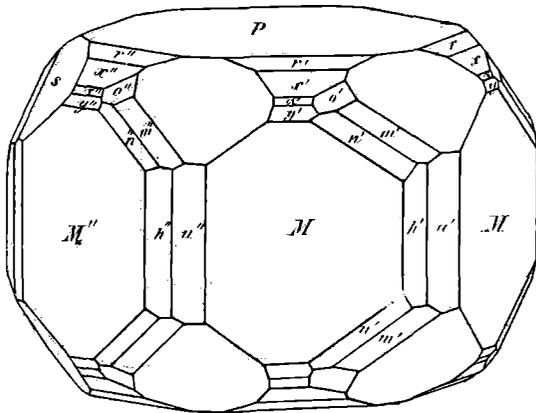


Fig. 19.

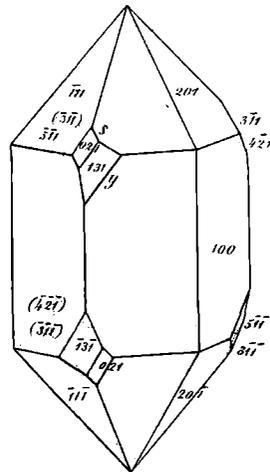


Fig. 20.

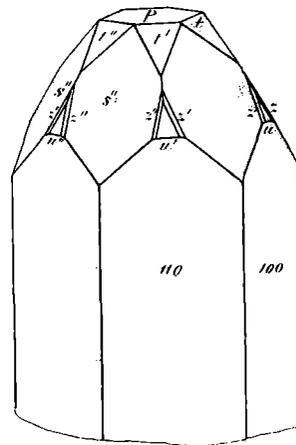
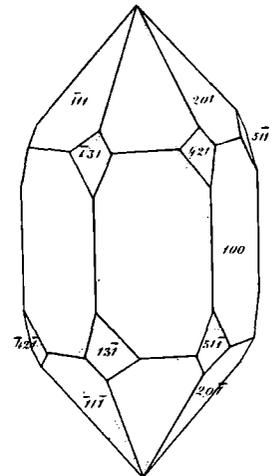


Fig. 21.



Schraub Krystallsystem

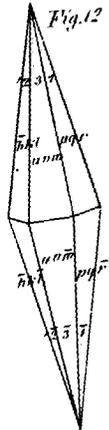
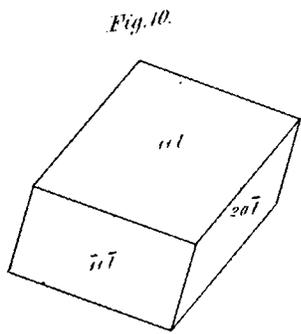
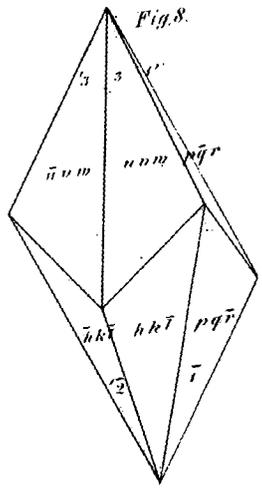
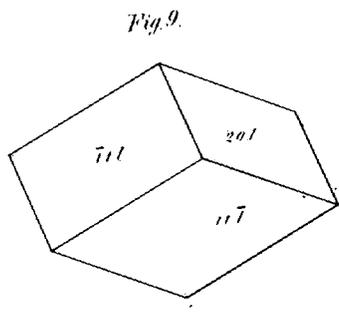
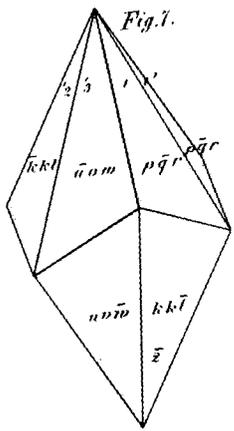
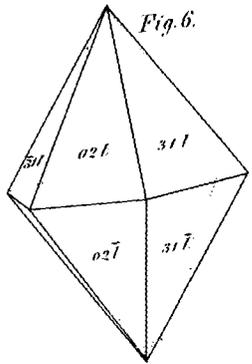
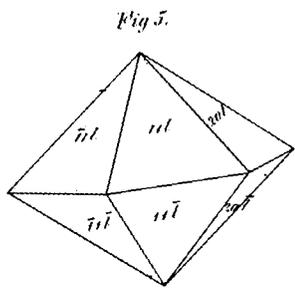
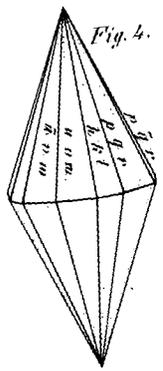


Fig. 13.

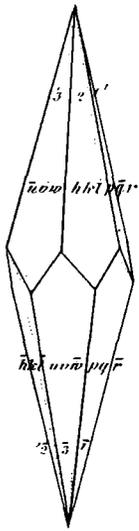


Fig. 14.

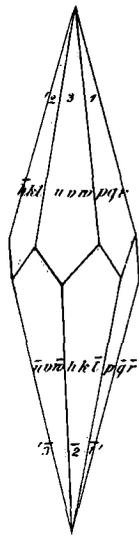


Fig. 15.

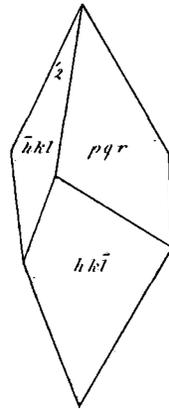


Fig. 16.

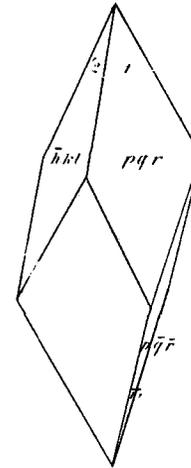


Fig. 17.

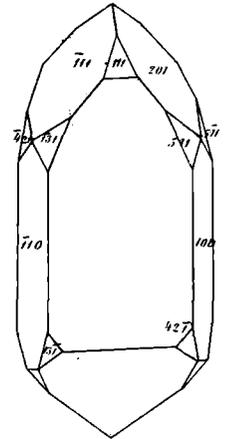


Fig. 18.

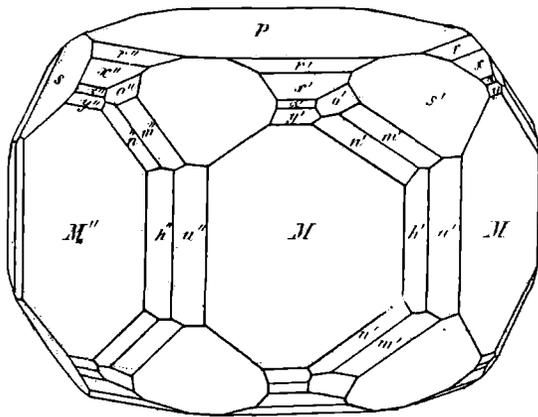


Fig. 19.

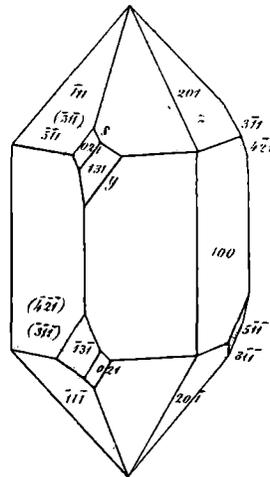


Fig. 20.

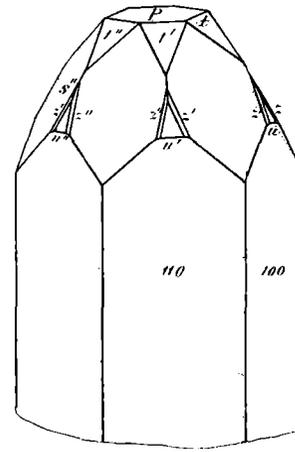


Fig. 21.

